

Oyun teorisi: Ders 18 Transkript

7 Kasım 2007

Profesör Ben Polak: Bugün bitirmemiz gereken çok şey var, ama bu oldukça resmi olacak. Bugün oyun oynamaya zamanımız olmayacak. Yani bazı yeni fikirler öğrenmemiz gereken bir gün olacak. Yeni bir takım resmi fikirlerin üzerinden gitmemizi gerektiren neden şu bir bakıma şu ana kadar topladığımız fikirlerle yapabileceklerimizi tüketmiş olmamız. Nerede olduğumuz konusunda kendimiz güncellemek amacıyla: dönemin ilk yarısında – yani ara sınavdan önce – eş anlı hamle oyunlarına baktık. Ve bu oyunlar hakkında düşünmenin bir yolu şuydu, bu oyunlarda ben seçimimi yaparken sizin ne yaptığınızı bilmiyordum ve siz seçiminizi yaptığınızda benim ne yaptığımı bilmiyordunuz.

Ara sınavdan bu yana ardışık hamleli oyunların basit örneklerine bakmaktaydık – mükemmel bilgili ardışık hamle oyunları – bunlarda ben seçimimi yapma sıram geldiğinde tipik olarak ne yaptığınızı bilirim. Ve siz de benim seçim sıram geldiğinde sizin ne yaptığınızı bildiğimi bilirsiniz. İleriye dönük yapmaya çalışmak istediğim şey şu, bu iki tertibi birleştiren stratejik durumlara bakabilmeyi istiyorum. Ben hem ardışık hamleler hem de eş anlı hamle oyunları içeren oyunları analiz edebilmek istiyorum. Özellikle, bu son haftalarda odaklanmış olduğumuz geriye dönük çıkarım tekniğini nasıl genişletebileceğimizi görmek istiyorum. Bazı parçalarının ardışık bazı parçalarının eş anlı olduğu oyunlarla başa çıkabilmek için geriye dönük çıkarım kavramını nasıl genişletebileceğimizi görmemizi istiyorum.

Yani birçok örneğe bakacağız ve bazı yeni fikirler ortaya çıkaracağız ve bugün ben sizi bunların üzerinden yürütmeye çalışacağım. Bu bizim hedefimiz. Hadi bir örnekle başlayalım. İşte çok basit bir oyun, Oyuncu 1 ilk hamleyi yapıyor ve 3 seçeneği var. Hadi bunlara yukarı, orta ve aşağı diyelim. Ve sonra Oyuncu 2 hamle yapar ve bu nodların her birinde Oyuncu 2'nin iki seçeneği vardır ve bu seçeneklere manalı bir şekilde aşağı ve yukarı – aşağı ve yukarı diyeceğiz. Ve burada onlara sol ve sağ diyeceğiz. Getiriler şöyle (4, 0), (0, 4), (0, 4), (4, 0), (1, 2), (0, 0). Yani bu mükemmel bilgili oyuna standart bir örnek, ara sınavdan beri gördüğümüz oyunlara benzer. Aslında bu görelilik olarak kolay bir tanesidir.

Bu oyunu nasıl çözeceğimizi biliyoruz. Bu oyunu ne kullanarak çözeriz? Geriye dönük çıkarım kullanarak ve burada hiç zor değil. Biliyoruz ki eğer Oyuncu 2 kendini burada bulursa 0 yerine 4'ü seçecek, eğer kendini burada bulursa sıfır yerine 4 seçecek ve eğer kendini şurada bulursa 1 yerine 2'yi seçecek. Yani Oyuncu 1 bu yukarıya gitmek istemeyecek çünkü burada 0 alacak ve ortaya da gitmek istemeyecek çünkü 0 alır ve istemez ki – ama eğer aşağı giderse Oyuncu 2 solu seçer ve Oyuncu 1 bir alır. Yani

Oyuncu 1 Aşağıyı seçer. Yani geri dönük çıkarım Oyuncu 1'in aşağı seçtiğini ve Oyuncu 2'nin buna sol seçerek tepki verdiğini öngörür.

Buna bir saniye bakarak, fark ederseniz bu oyundaki neden – geriye dönük çıkarımdan bir adım geri atarak – Oyuncu 1'in yukarı veya ortayı seçmemesinin nedeni şuydu, çünkü o hamle Oyuncu 2 tarafından gözlemlenecek ve her durumda da Oyuncu 2 Oyuncu 1'i ezecekti. Yani eğer Oyuncu 1 yukarı gitseydi, Oyuncu 2 Oyuncu 1 ile bu bir nevi “tam rekabetçi oyunu” (strictly competitive game) oynuyor olurdu ve Oyuncu 2 2'ye 4 veren ve 1'e 0 veren bu seçeneği seçerdi. Tam tersi eğer Oyuncu 1 ortayı seçseydi, Oyuncu 2 yukarı seçerek Oyuncu 1'i ezebilirdi, bir kez daha Oyuncu 2'ye 4 ve Oyuncu 1'e 0. Yani yukarı veya ortayı takip ederek oyunun bu kısmına gitmemenin iyi bir nedeni vardı ve bu neden şudur, oyunun o kısımlarında Oyuncu 2'nin çok büyük bir ikinci hamle avantajı vardır. Bu herkes için açık mı?

Ben şimdi benzer ama potansiyel olarak farklı bir oyunu ele almak istiyorum, yani bu oyunu tekrar çizeceğim, ama bunu çizmeden önce, size ne yapacağımı anlatayım. Yeni bir fikir ortaya çıkarmak istiyorum ve bu yeni fikir şöyle olacak, Oyuncu 2 yukarı veya ortayı ayırt edemeyecek. Tekrar söyleyeyim. Eğer Oyuncu 1 aşağı seçerse, Oyuncu 2 bunu gözlemleyecek, tıpkı standart mükemmel bilgili oyunlarda yaptığımız gibi, ama eğer Oyuncu 1 yukarı veya orta seçerse, Oyuncu 2'nin bu iki seçimden hangisinin seçildiğini bilmediği fikrini yakalamak istiyorum. Bu açık bir şekilde oyunu çok değiştirecek ve ilk soru şu, bu fikri ağaçta nasıl gösteririm?

Bunu bir ağaçta temsil etmenin güzel bir yolunu göstermeye çalışayım. Yani oyunda aynı yapı var. Oyuncu 1 yine yukarı, orta ve aşağı arasından seçim yapıyor. Ve Oyuncu 2 bir kez daha burada yukarı veya aşağı, yukarı veya aşağı ve sol veya sağ seçiyor. Ve getiriler değişmedi. Onlar hala (4, 0), (0, 4), (0, 4), (4, 0), (1, 2) ve (0, 0). Yani bu zaten notlarınızda olan oyunun aynısı, ama şimdi bu ağacı Oyuncu 2'nin ayırt edemeyeceğini – Oyuncu 1'in yukarı mı orta mı seçtiğini gözlemleyemeyeceğini, ama Oyuncu 1'in aşağı seçtiğini gözlemleyebileceğini nasıl belirteceğimi göstermek için adapte edeceğim. Bunu yapmanın yolu basitçe, Oyuncu 2'nin ayırt edemediği nodları noktalı bir çizgiyle birleştirmektir.

Yani buradaki fikir, bu noktalı çizginin ima ettiği şudur bu iki nod aynı bilgi kümesine aittir. Yani buradaki yeni fikrimiz, bilgi kümesi fikridir. Getiriler sağda olduğu gibi solda da aynı olacak şekildedir. Yani buradaki fikir şudur Oyuncu 2 bu iki nodu birbirinden ayırt edemez. Oyuncu 2 bu bilgi kümesinde olduğunu bilir: Oyuncu 1'in ya yukarı ya da orta seçmiş olması gerektiğini bilir, Oyuncu 1'in aşağıyı seçmediğini bilir, ama aslında burada mı yoksa burada mı olduğunu bilmez. Şimdi bu oyunda ne olur? Bu oyun çok farklı bir oyundur. Neden farklı bir oyundur?

Hadi daha önce konuşmuş olduğumuz gevşek mantığı uygulamaya çalışalım. Daha önce, eski oyunda dedik ki, eğer Oyuncu 1 yukarı seçerse, Oyuncu 2 Oyuncu 1'in yukarı seçmiş olduğunu bilir ve bunu gözlemlediği için Oyuncu 2 aşağıyı seçerek

Oyuncu 1'i ezebilir. Ve eğer Oyuncu 1 ortayı seçmişse, Oyuncu 2 Oyuncu 1'in ortayı seçtiğini gözlemler ve bu kez yukarıyı seçerek 1'i ezer. Problem şu ki şimdi bu yeni oyunda Oyuncu 2 burada mı, bu durumda aşağıyı seçmek ister, yoksa burada mı, bu durumda yukarıyı seçmek ister, olduğunu bilmiyor. Yani Oyuncu 2'nin seçimi artık çok belirgin değil. Bu basit geriye dönük çıkarım argümanı yok oldu.

Daha da fazlası, Oyuncu 1 Oyuncu 2'nin yukarı ve ortayı gözlemleyemeyeceğini bilir, yani artık Oyuncu 1'in aşağıyı seçmek isteyeceği bir durum söz konusu olmayabilir. Şu hala doğrudur, eğer Oyuncu 1 aşağı seçmiş olsaydı Oyuncu 2 bunu gözlemleyebilirdi ve solu seçerdi, yani argümanın bu kısmı aynı. Burada ne olacağını düşünürüz? Bilmiyoruz, ama size ne olabileceği konusunda bir öneri vereyim. Oyuncu 1 şöyle söyleyebilir, hey ben yukarı ve orta arasında randomizasyon yapabilirim. Zamanın yarısında yukarı ve yarısında ortayı seçebilirim. Eğer $\frac{1}{2}$ ile yukarı ve $\frac{1}{2}$ ile ortayı seçersem, Oyuncu 2 bilmeyecek – genelde – ne yapmış olduğumu bilmeyecek. Oyuncu 2'nin ne yapacağı çok açık değil ve ben yuları ve orta arasında randomize ettiğim için Oyuncu 2 ne yaparsa yapsın, ben yarısında 4 ve yarısında 0 alırım bunun beklenen değeri 2 olur.

Tekrar söyleyelim, yani bu oyunda Oyuncu 1 yukarı ve orta arasında yüzde elli elli randomize etmeye karar verebilir, bu yüzden bilir ki zamanın yarısında 4 alacak ve zamanın yarısında 0 alacaktır bu da beklenen getiri olarak 2 eder ki eğer fark ettiyseniz bu aşağıyı seçerek aldığından daha iyidir. Yani oyundaki bu değişiklik, bu oyunun bilgisindeki değişiklik, sadece farklı bir oyuna yönlendirmekle kalmadı ama oldukça farklı bir sonuca da yöneltti. Yani burada 1, örneğin, yukarı ve orta arasında randomizasyon yapabilir ve burada biz tam olarak ne yaptığını biliyoruz, 1 aşağıyı seçer.

Yani oyunun içinde bu bilgi değişikliği nedeniyle çok farklı sonuçlar elde ederiz ve bugünün teması da bu: bilgi fark yaratacaktır. Bilgiyi bu bilgi kümelerini düşünerek modelleme yoluna gideceğiz. Ve gün sürerken, size bazı resmi tanımlar vermeye başlamak istiyorum. Yani fikir bu, şimdi resmi tanıma bakalım. Bugün çok fazla yazı olacak, bu yüzden yeterince boş sayfası olan bir defter getirmişsinizdir diye umuyorum. Günün ilk resmi tanımı bu son örnekten geliyor. Resmi tanım yakalamak istediğim şu fikirdir: şu fikri yakalamak istiyorum ağacın altlarına doğru olan oyuncular ağacın yukarısında ne yapılmış olduğunu tam olarak bilmezler. Ve resmi tanım bilgi kümesi fikri üzerinden olacak.

Oyuncu i'nin bir bilgi kümesi – bu durumda Oyuncu 2'yi içeriyor ama daha genel olarak Oyuncu i – bir koleksiyon – veya isterseniz bir küme – Oyuncu i'nin nodlarının bir koleksiyonudur ki bunlar arasında – sanırım bu ikiden fazla olabilir – o yüzden şöyle diyelim hiçbirisini i ayırt edemez. Şimdi öyle olacak ki, bilgi kümelerini akıllıca kullanarak, teknolojimizi kullanabileceğiz, ağaç çizme teknolojimizi pek çok çeşit ilginç ve artan karışıklıkta bilgi koşullarını yakalamak için kullanabileceğiz.

Bu belirli oyunda, Oyuncu 1 Oyuncu 2'nin bu ağaçta yukarı veya ortayı ayırt edemeyeceğini biliyordu ve Oyuncu 1 ağacın sol tarafında ayırt edebileceğini biliyordu. Biz daha ayrıntılı bir ağaçta Oyuncu 1'in Oyuncu 2'nin ne bileceğini bilmeyebileceği bir durumu yakalamak için bile bilgi kümelerinden faydalanabiliriz. Ama bunu şimdi yapmayacağım: bunu sonraya bırakacağım ve ev ödevinde bunun üzerine bazı örnekler göreceksiniz. Resmi tanımımız var. Günün büyük araçlarından birisi bu olacak, ama dikkatli olmamız gereken birkaç şeyi yazayım: birkaç kural.

Yani bu bilgi kümeleri belirli kurallara uymak zorundadır ve belirli şeylere izin yoktur. Özellikle şuna izin yoktur. İşte Oyuncu 1'in ilk hamleyi yaptığı bir ağaç ve Oyuncu 2 Oyuncu 1'in hamlesini göremiyor. Yani bu iki nod, Oyuncu 2'nin nodları. Bunlar aynı bilgi kümesindedir, bu da şu demek Oyuncu 2'nin bu iki nodu ayırt edemiyor olması gerekir. Ve ancak diyelim ki ağaç şöyle görünüyor. Tamam, yani ben bunun saçma olduğunu ileri sürüyorum. Buna izin veremeyiz. Buna izin vermek hiçbir mantığa sığmaz. Bunun neden olduğunu görebilen var mı? Neden bu gerçekte mantıklı bir ağaç değil? Herkes bunu görüyor mu? Neden bu akla uygun bir ağaç değil?

Öğrenci: Eğer Oyuncu 2 üç seçeneği olduğunu bilirse o zaman yukarıdaki nodda olduğunu bilir. .

Profesör Ben Polak: Kesinlikle, bu ağaçta getiriler yok, ama eğer Oyuncu 2 üç seçeneği olduğunu görürse, yukarıdaki nodda olması gerektiğini bilir. Eğer iki seçeneği olduğunu görürse aşağıdaki nodda olmalıdır. Yani bu ağaçta, Oyuncu 2'nin burada mı yoksa burada mı olduğunu bilmemesi gerekiyordu, ama sadece kaç tane seçeneği olduğunu görerek yukarı nodda mı yoksa aşağı nodda mı olduğunu çıkarabilir. Yani bu mantıklı olamaz. Yani buna izin yok, bu yüzden üzerine kırmızı bir çarpı çizeceğiz. Şimdi izin verilmeyen ikinci şey biraz daha incelikli ve esasen çok ilginç bir şeydir. Bu biraz defter tutmak gibi oluyor ama ikinci şey daha ilgi çekici.

Hadi buna bir bakalım. İşte daha ilginç bir ağaç. Oyuncu 1 ilk hamleyi yapar. Oyuncu 2 bu hamleyi görür ve Oyuncu 2 ikinci hamle yapan olur. Ve sonra bunun altında Oyuncu 1'in tekrar hamle yapmak için bir şansı daha olabilir. Yani yine buraya getirileri yazmadım. Oyuncu 1 ilk hamleyi yapar, Oyuncu 2 ikinci hamleyi yapar ve eğer Oyuncu 2 aşağıyı seçerse veya yukarıyı seçerse o zaman Oyuncu 1'e yine hamle sırası gelir. Şimdi ben bunun akla uygun bir ağaç olmadığını öne sürüyorum Bunun neden akla uygun olmadığını görebilen var mı? Neden bu mantıklı değil? Steven?

Öğrenci: Oyuncu 1 ilk yaptığı seçimden dolayı tam olarak hangi nodda olduğunu bilir.

Profesör Ben Polak: Kesinlikle, yani Oyuncu 1'in bu üstteki noda gelmesi için, Oyuncu 1'in daha önce yukarı seçmiş olması gerekir ve bu aşağıdaki noda gelebilmesi için, Oyuncu 1'in daha önce aşağı oynamış olması gerekir. Yani Oyuncu

1 kendi hamlelerini hatırlayabildiği sürece nerede olduğunu bilir. Doğru mu? Yani Oyuncu 1 daha önce ağaçta ne yapmış olduğunu hatırlayabildiği sürece bunları ayırt edebiliyor olmalıdır. Yani buna izin vermeyeceğiz ama burada bir açıklama yapmak istiyorum. Bunu yok saymanın bir varsayımı var ve bu varsayım da mükemmel anımsama (perfect recall) veya mükemmel hatıra (perfect memory). Ve insanlar her zaman anımsamaz – gerçek hayatta insanlar her zaman mükemmel anımsamaya sahip değillerdir.

İki nedeni var – ve biz bunu hep varsayacağız, ama bir açıklamada bulunayım. İnsanların mükemmel anımsama yapamamasının iki nedeni vardır. Bir neden, benim gibi, yaşlanırlar. Basitçe dün ne yaptıklarını hatırlayamazlar. Yani ben arabayla eve giderken sağa dönmeden önce kaç trafik ışığından geçmek zorunda olduğumu aşağı yukarı bilirim, ama bazen hangi trafik ışığında olduğumu unutup ya çok erken ya da çok geç sağa dönerim. Bu sizlere olmaz arkadaşlar, ama ben biraz ihtiyarladığım için bana olur, yani yaşlılık mükemmel anımsamayı geçersiz kılar.

Bir başka önemli örnek belki de şudur eğer oyundaki oyuncuların kendileri birer kurumsa. Şu bazen işe yarar ve sınıfta bununla ilgili çok konuştuk, bir oyundaki oyuncuyu bir firma veya bir ülke olarak tahayyül etmek veya gerçek kararların firmadaki, kurumdaki veya ülkedeki değişik gerçek kişiler tarafından alındığı bir çeşit kurum farz etmek. Bu mükemmel anımsama varsayımı şunu söylüyor kurumun içindeki oyuncular aynı kurumdaki diğer kişilerin ne yaptıklarını bilir. Eğer bir oyuncu olarak General Motors'u modelliyorsak, bu varsayım GM'deki finans direktörü ile genel müdürün aksiyonlarını karşılıklı olarak gözlemledikleri anlamına gelir: onlar aynı sayfadadırlar. Sol el sağ elin ne yaptığını bilir.

Tipik olarak bunu varsayacağız, ama şu noktayı vurgulayalım: bu bir varsayım ve bunu esnettiğimizde ne olacağını görmek çok ilginçtir. Peki, bu aklımızdayken, bir sonraki tanımımıza geçebiliriz ve bu daha önce derste değinmiş olduğum bir şey, ama şimdi resmi olmak istiyorum. Şimdi resmi olabiliriz. Daha önce derste mükemmel bilgi fikri hakkında konuşmuştuk. Yani, örneğin, Zermelo'nun teoreminden konuşurken, mükemmel bilgili oyunlar hakkında konuştuk.

Gayri resmi olarak bunun ne olduğunu söyledik – mükemmel bilgili oyun oyundaki her oyuncunun önceki hamleleri gördüğü bir oyundur. Bu bizim gayri resmi tanımımızdı, ama şimdi çok basit bir şekilde resmi tanıımı yapabiliriz. Mükemmel bilgi şöyle bir durumdur ağaçtaki tüm bilgi kümelerinde – mükemmel bilgili oyunlar ağaçtaki tüm bilgi kümelerinde sadece tek bir karar nodu bulunan oyunlardır. Burada açık olmak istiyorum. Burada söylediğimiz şey şu, eğer her bir bilgi kümesinin tek elemanlı olduğu bir ağacımız varsa, esasen hiç noktalı çizgilerle uğraşmamız gerekmiyorsa: bu bir mükemmel bilgili oyundur. Ve buradaki hiç kimse için bu bir sürpriz olmamalı çünkü ara sınavdan bu yana ağaçları hep böyle çiziyoruz. Doğru mu?

Tabii ki yenilik şu şimdi mükemmel olmayan bilgili oyunlara bakabileceğiz. Bunu yapıyor olmamızın nedeni şu çünkü bilginin mükemmel olmadığı oyunları düşünmek– az önce gördüğümüz örnekteki gibi – ilginç olacak. Peki, mükemmel olmayan bilginin tanımı nedir? Mükemmel olmayan bilginin tanımı “mükemmelliği olmayan bilgidir”. Mükemmel bilginin ne olduğunu tanımlamıştık. Geri kalan her şey ise mükemmel olmayan bilgidir. Gerçek hayatta mükemmel olmayan bilgili olduğu ortaya çıkan birçok oyun vardır. Sizin yaptığınız bazı şeyleri gözlemleyebileceğim, ama diğer şeyleri tam olarak ne yaptığınız bilemeyeceğim birçok stratejik durum vardır.

Hadi doğrudan bir örneğe gidelim. Bu tanımı odakta tutmamız gerektiğini düşünmüyorum, bu yüzden bu tahtadan kurtulalım. Hadi bir örnek yapalım. Bugün bir sürü örnek yapıyor olacağız. Bu örnek Oyuncu 1'in ilk hamleyi yaptığı bir ağaç olacak. Oyuncu 2 bu hamleyi göremiyor ve bazen bu iki nodu da 2 olarak etiketlemek yerine, sadece bilgi kümesinin üzerine 2 yazacağım, sırf bu nodların ikisinin de Oyuncu 2'ye ait olduğunu belirtmek için. Yani Oyuncu 2 ikinci hamleyi yapar. Ve Oyuncu 1'in hamlelerine yukarı ve aşağı diyeceğiz ve Oyuncu 2'nin hamlelerine sol ve sağ diyeceğiz, imalı bir şekilde. Buradaki bilgi kümesi nedir? Bilgi kümesi Oyuncu 2'nin Oyuncu 1'in yukarı mı aşağı mı hamle yaptığını göremediği gerçeğini ifade ediyor. Oyuncu 2 Oyuncu 1'in aşağı mı yukarı mı seçtiğini göremiyor.

Şimdi bu neden önemlidir? Henüz getirileri koymuş değilim ama biraz sonra koyacağım. Önemlidir çünkü bu mükemmel bilgili bir oyun olsaydı, bu bilgi kümesi – burada iki bilgi kümesi olmuş olsaydı, bu noktalı çizgi burada olmamış olsaydı – o zaman Oyuncu 2 bu nodda sol mu sağ mı veya bu nodda sol mu sağ mı seçimini ayrı ayrı yapabilirdi. Ama Oyuncu 2 yukarıdaki nodda mı aşağıdaki nodda mı olduğunu bilmediğinden dolayı – Oyuncu 1'in aşağı mı yukarı mı seçtiğini bilmiyor – burada aslında tek bir seçim yapmak durumunda. Her iki nodda birden sol seçer veya her iki nodda birden sağ seçer. Ve bunu dersteki ilk örneğimize götürürsek, orada da aynı özelliği görürüz.

Mükemmel bilgili bir oyundan mükemmel olmayan bilgili oyuna geçiş yaptığımızda Oyuncu 2'ye ait seçenekleri azaltmış olduk. Burada bu iki farklı nodda, Oyuncu 2 ayrı ayrı yukarı veya aşağı seçebilirdi. Ama burada Oyuncu 2 sadece 1 seçim yapar ve bu her iki nodda uygulanmalıdır çünkü Oyuncu 2 bu iki nodu birbirinden ayırt edemez. Peki, bakalım bir kez getirileri koyduğumuzda, bu belirli oyunda ne olacak. İşte bazı getiriler: (2, 2), (-1, 3), (3, -1) ve (0, 0). Yani bir kez daha Oyuncu 2 yukarıdaki nodda ve aşağıdaki nodda ayrı ayrı seçim yapamıyor, ya sol seçiyor ya da sağ seçiyor.

Ama bu oyunun başladığımız oyundan daha kolay olduğu ortaya çıkıyor. Neden başladığımız oyundan daha kolay? Başladığımız oyundan daha kolay çünkü Oyuncu 2'nin bakış açısından, ister yukarıda olduğunu isterse aşağıda olduğunu düşünsün, her bir durumda en iyi seçimi aynıdır. Eğer yukarıdaki nodda olduğunu düşünürse o zaman solu seçerek 2 alır ve sağ seçerek 3 alır, yani sağ daha iyi görünüyor. Eğer

daha aşağıdaki nodda olduğunu düşünürse o zaman solu seçmek -1 ve sağ seçmek 0 verir, yani bir kez daha sağ daha iyidir.

Yani aslında, bu belli oyunda, Oyuncu 2'nin Oyuncu 1'in yukarı seçtiğini ve bu yüzden yukarıdaki nodda olduğunu düşünmesinden veya Oyuncu 2'nin Oyuncu 1'in aşağı seçtiğini ve bu yüzden aşağıdaki nodda olduğunu düşünmesinden bağımsız olarak, Oyuncu 2 bu oyunda aynı seçimi yapacak yani sağ seçecek. Yani aslında fark ettiyseniz bu oyunun çözümü geriye dönük çıkarıma çok benziyor. Oyuncu 2'nin seçimi biraz daha karmaşık olsa da – nerede olduğunu bilmiyor -- aslında Oyuncu 2'nin bu bilgi kümesinde ne yapacağı çok açık.

Şimdi bunu ileri doğru biraz daha zorlarsak neden olduğunu görebiliriz. Bu oyunda Oyuncu 1'in iki stratejisi var yukarı veya aşağı. Ve Oyuncu 2'nin iki stratejisi var, ya sol ya da sağ seçer. Onun sadece iki stratejisi olduğunu fark edin çünkü bu iki nodda aynı şeyleri seçmeli ve nerede olduğunu bilmiyor. Tamam, hadi bu oyunun matrisini çizelim ve tanıdık gelecek mi bakalım. Oyuncu 1 yukarı ve aşağı arasından seçiyor. Ve Oyuncu 2 sol ve sağ arasından seçiyor. Ve buradaki getiriler şöyle: (yukarı, sol) (2,2); (yukarı, sağ) (-1, 3); (aşağı, sol) (3, -1) ve (aşağı, sağ) (0, 0) dır. Bu ne oyunudur? Bu hileli bir soru olarak yöneltilmedi. Birileri elini salladı havaya. Bu ne oyunudur?

Öğrenci: Tutukluların ikilemi.

Profesör Ben Polak: Bu Tutukluların İkilemidir. Bu bizim eski bir arkadaşımız. Bu Tutukluların İkilemi, ilk günden gördüğümüz bir oyun. Ama burada ne gördüğümüzü fark ettiniz mi? Bu Tutukluların İkilemini o kadar çok gördük ki çoğunuz için dayanılmaz şekilde aşına olduk. Şimdi işte ara sınav öncesi üzerinde konuştuğumuz oyunlar gibi temsil edilen bir Tutukluların İkilemi. Ama burada da aynı oyun var. Bu da Tutukluların İkilemi, ama şimdi bunu bir ağaca çizdim. Burada matris olarak ve burada ağaç olarak çizdim. Şimdi elimizde bilgi kümeleri olduğundan dolayı ara sınavdan önce çalıştığımız oyunların hepsini böyle temsil edebiliriz. Eşanlı hamle oyunlarının hepsini bilgi kümeleri oluşturup ağaçlarla çalışabiliriz. Buradaki anahtar gözlem nedir?

Oyuncu 1'in ilk hamleyi yapması veya Oyuncu 2'nin ilk hamleyi yapması aslında hiç fark etmez. Bu oyunda zamansal olarak ne olduğu esasen hiç önemli değildir. Önemli olan bilgidir. Oyuncu 1 hamlesini yaptığında Oyuncu 2'nin ne yapacağını bilmiyor. Oyuncu 2'nin ne yaptığını bilmiyor. Ve Oyuncu 2 hamlesini yaparken 1'in ne yaptığını bilmiyor: ve bu bir eşanlı hamle oyunudur, zaman geçiyor olsa bile. Anahtar olan bilgidir, zaman değil. Şimdi, buraya gelirken gizlice bir şey sıkıştırdım ve ne sıkıştırdığımı size söylemem lazım. Bir stratejinin ne olduğunu gizlice araya sıkıştırdım.

Bir ağaçtan veya yaygın biçimli bir oyundan, normal biçimli bir oyuna gittim ve bu dersten önce bunu birkaç kez yapmıştık. Örneğin, yaklaşık bir hafta önce, piyasaya giriş oyununda yaptık. Ama orada tek yaptığımız şeydu mükemmel bilgili bir oyunda stratejinin tanımını yaptık. Ve size hatırlatmak için, mükemmel bilgili bir oyunda strateji bütün bir aksiyon planıdır. Söz konusu oyuncuya her bir nodda ne yapmaları gerektiğini söyler. Ama şimdi biraz daha dikkatli olmamız lazım. Bir stratejinin – bir kez mükemmel olmayan bilgiye geçtiğimizde – bir stratejinin size ait her bir nodda ne yapmanız gerektiğini söylemesine izin veremeyiz, çünkü siz kendiniz bu nodları ayırt edemiyorsunuz. Yani bu daha karmaşık oyunlara uygun hale getirmek için strateji tanımımızı adapte etmeliyiz.

Hadi bunu açık olan şekilde adapte edelim. Tanım, şimdilik sadece saf stratejileri tanımlayacağım. Oyuncu i'nin bir saf stratejisi bütün bir aksiyon planıdır – yani burası öncekiyle aynı. Ama bütün bir aksiyon planı olmak ne demektir? Her bir nodda bana ne yapacağımı söyleyemez. Bu doğru tanım olamaz çünkü ben nodları ayırt edemiyorum. Yani tek yapabileceği şey bana her bilgi kümesinde ne yapacağımı söylemektir. Yani Oyuncu i'nin i'ye ait her bir bilgi kümesinde ne yapması gerektiğini belirtir – gerekmez herhalde yanlış oldu, o yüzden sadece ne yapacağını belirtir diyelim.

Eğer bir hafta kadar geriye giderseniz stratejinin hemen hemen aynı olan tanımını görürsünüz, ama önceki tanım i'ye her nodda ne yapacağını söylüyordu ve buradaki ise i'ye her bir bilgi kümesinde ne yapacağını söylüyor. Yatığım şey şu eski tanım düzeltiyorum ki onu şimdiden itibaren bakacağımız daha ilginç oyunlarda kullanabilelim. Yani şimdi elimizde bir strateji tanımı var, burada gördüğümüz fikre devam edebiliriz. Buradaki fikir nedir? Bana ağaç şeklinde verebileceğiniz herhangi bir oyunu matris şeklinde tekrar yazabilirim.

Hadi bu fikrin başka örneklerine bakalım. Bugün pek çok yeni fikir var, ama bazıları sadece düzeltme ve bir nevi defter tutma ve bazıları daha ilginç. Hadi bir ağaçla başlayalım. Hadi bunu önce gördüğümüzden birazcık daha ilgi çekici bir ağaç yapalım. Aslında bu fazla ilginç, hadi biraz daha yavaş gidelim. Hadi Oyuncu 1'in 2 seçeneği olsun ve Oyuncu 2'nin 3 seçeneği var. İşte basit bir ağaç ve getirileri de koyalım, ama izin verin getiriler için rakamlar yerine bazı harfler koyayım. Bu aksiyonlara yukarı ve aşağı diyelim. Ve bu aksiyona sol, orta ve sağ ve sol, orta ve sağ. Ve getirilere şöyle diyeceğiz (A1, A2), (B1, B2), (C1, C2), (D1, D2), (E1, E2) ve (F1, F2), sırf takip edebilmek için.

Ben size bu ağacı alıp matrise nasıl dönüştüreceğimizi göstermek istiyorum. Peki, bunu nasıl bir matrise dönüştürebiliriz? Bakarız ve Oyuncu 1'in kaç stratejisi var ve Oyuncu 2'nin kaç stratejisi var diye sorarız. Burada Oyuncu 1'in iki stratejisi var, yukarı veya aşağı. Ve Oyuncu 2'nin 3 stratejisi var, ya sol, ya orta ya da sağ. Yine bu iki nodda ayrı ayrı seçim yapamazlar bu yüzden gerçekte sadece 3 stratejileri var: sol, orta, sağ. Defterlerinizde burada bir boşluk bırakın, bu sağda bir boşluk bırakın

ve bu ağacın matrisini şu aşağıya çizelim. İşte matrisim. Oyuncu 2 sol, orta veya sağ seçer ve Oyuncu 1 yukarı veya aşağı seçer. Getiriler açık şekilde şöyle olur. Yani (A1, A2), (B1, B2), (C1, C2), (D1, D2), (E1, E2) ve (F1, F2).

Herkes yaygın biçimden, ağaçtan normal biçime, matrise nasıl geçiş yaptığımızı gösteren bu basit egzersizi anladı mı? Bu kolaydı değil mi? Ancak burada ilginç bir şey var. Şu belirgin değil, eğer size matrisi vermiş olsaydım, bunun gelmiş olduğu ağacın şu olduğu çok belirgin değil. Aynı matrise tekabül ettiğini öne sürdüğüm başka bir ağaç çizeyim. İşte başka bir ağaç. Bu başka ağaçta Oyuncu 1'i ilk hamle yapan olarak almak yerine, Oyuncu 2 ilk hamleyi yapan olacak. Oyuncu 2'nin 3 seçimi olmalı ve bunların isimleri sol, orta ve sağ olmalı. Ve bu durumda Oyuncu 1'in büyük bir bilgi kümesinde bulunması ve iki seçimi olması gerekir ki bunlara yukarı ve aşağı diyeceğiz çünkü bu matrisin bize söylediği budur. Bize Oyuncu 2'nin 3 seçeneği olduğunu ve Oyuncu 1'in 2 seçeneği olduğunu söylüyor.

Yani çizmiş olduğum matriste bu doğru. Ve getirilerin nerede olduğuna dikkat edelim. (sol, yukarı) bu kolay: bu (A1, A2) olacak. (Sol, aşağı) (D1, D2) olacak. (Orta, yukarı) (B1, B2) olacak. (Orta, aşağı) (E1, E2) olacak. (Sağ, yukarı) (C1, C2) olacak ve (sağ, aşağı) (F1, F2) olacak. Burada getirileri nereye koyduğuma dikkat etmeliyim, ama sanırım bu az önce yapmış olduğum şey doğru. Burada ne yaptığımı fark edin: bu ağaçtan başladım. Matrisi oluşturmak kolay bir operasyondur, o kadar kolaydı ki biraz sıkıcı oldu ve matristen diğer tarafa doğru gidip bu öbür ağacı oluşturabileceğimi görmek de zor değildi. Bu da Oyuncu 2'nin 3 stratejisi ve Oyuncu 1'in, bunların hepsi Oyuncu 1, 2 stratejisi olduğu bir ağaç.

Peki, bundan ne öğrenmiş olduk? Buna biraz daha dikkatli bakalım. Bu ağaç Oyuncu 1'in ilk hamleyi yaptığı ve Oyuncu 2'nin Oyuncu 1'in seçimini göremediği bir ağaçtı. Doğru mu? Bu ağaç ise Oyuncu 2'nin ilk hamleyi yaptığı ve Oyuncu 1'in 2'nin seçimini göremediği bir ağaçtır. Burada neyin farkına varıyoruz? Bunlar gerçekte aynı oyunlar. Bu oyunlar arasında bir fark yok. Aslında bunlar aynı oyundur. Oyuncu 1'in ilk hamleyi yapıp, Oyuncu 2'nin 1'in seçimini görememesi veya Oyuncu 2'nin ilk hamleyi yapıp, Oyuncu 1'in 2'nin seçimini görememesi fark yaratmaz. Önemli olan, hiçbir oyuncunun hamle yapmadan önce diğerinin ne seçtiğini görememesidir, bunların ikisi de tam olarak aynı oyuna tekabül eder.

Buradaki mesaj nedir? Mesaj daha önce derste konuştuğumuz bir şey, ama buna daha resmi yaklaşılmaya çalışıyorum. Mesaj şu, önemli olan bilgidir, zaman değil. Tabii ki zaman tamamen alakasız bir şey değil. Henüz gerçekleşmemiş bir şeyi bilmem mümkün değildir, yani zamanın bilgiye etkileri olacaktır, ama en nihayetinde önemli olan bilgidir. Ne biliyorum ve bunu ne zaman biliyordum? Yani bilgi kümeleriyle yakalamaya çalıştığımız anahtar fikir, tekrar etmek amacıyla, oyuncu ne biliyordu ve bunu ne zaman biliyordu, bu Watergate Davalarından meşhur ifadedir.

Tamam, hadi daha ilginç bir oyuna bakalım ve gerçekten bu oyunlarda ne olacağı hakkında bir şeyler söyleyebilir miyiz görelim. Yani gün sonunda elimizde yeterince araç gereç olsun istiyorum ki bu oyunları gerçekten analiz etmeye başlayabilelim ve ne olacağını öngörebilelim. Yani ilerledikçe daha karmaşık hale gelecek o yüzden şimdiden biraz karmaşıktıralsın. Bir kez daha Oyuncu 1'in iki seçeneği olan bir oyun ve bunlara yukarı ve aşağı diyeceğiz. Bu çok aşına olduğumuz bir tema haline geldi. Bir kez daha, Oyuncu 2 sonradan hamle yapacak ve şimdi işleri basit tutmak için Oyuncu 2'nin sadece iki seçeneği olacak, sol veya sağ ya da sol veya sağ.

Ama şimdi işleri daha ilginç hale getirmek istiyorum, hadi Oyuncu 1'e tekrar hamle yaptıralsın. Yani eğer yukarı, sağ gerçekleşirse Oyuncu 1 tekrar hamle yapar, bu durumda Oyuncu 1 yukarı veya aşağı seçer. Ben küçük y ve küçük a kullanacağım bunu ağacın soluna doğru olanlardan ayırmak için. Bu çok basit bir ağaç, Oyuncu 1 ilk hamleyi yapar. Oyuncu 2 ikinci hamleyi yapar – buraya 2 yazmayı unuttum. Ve sonra eğer (yukarı, sağ) gerçekleşirse o zaman Oyuncu 1 tekrar hamle yapar. Hadi getirileri yazalım. Bunlar şöyle olsun (4,2), (0,0), (1,4), (0,0) yine ve (2,4). Bugünkü derste şimdiye kadar konuştuğumuz metotları tam olarak kullanarak bu oyunu analiz etmeye devam edelim.

Yapacağım ilk şey şu, ben bunu matrise dönüştürmek istiyorum. Bu istikamette yapılacak ilk şey Oyuncu 1'in kaç stratejisi olduğunu ve Oyuncu 2'nin kaç stratejisi olduğunu bulmaktır. Bunu bile yapmadan önce kaç tane bilgi kümeleri olduğunu bulmaya çalışalım. Ben Oyuncu 2'nin sadece 1 bilgi kümesi olduğunu ileri sürüyorum, doğru mu? Ama Oyuncu 1'in iki bilgi kümesi var. Oyunun başındaki bu bilgi kümesi ve potansiyel olarak ağacın daha aşağısındaki bu bilgi kümesi var.

Bir strateji size – bir strateji oyuncuya onlara ait her bilgi kümesinde ne yapacağını söylemelidir. Yani Oyuncu 1'in stratejileri nelerdir? Bir strateji yukarı ve sonra yine yukarıdır, başka bir strateji yukarı ve sonra sağ, başka bir strateji aşağı ve sonra yukarı ve dördüncü bir strateji aşağı ve sonra sağ. Derste daha önce görmüş olduğumuz bir şeyi fark edin: burada biraz gereğinden fazlalık var. Bu iki aşağı stratejisi bu oyunu, ağacın bu nodun ulaşamayacağı kısmına zorluyor. Bunu daha basitçe söylemek gerekirse, eğer Oyuncu 1 aşağı seçerse, daha sonra yukarı veya aşağı seçimi yapmak zorunda olmayacağını biliyor.

Evet. Pardon – teşekkürler. Tekrar başlayayım çünkü bu yanlış notasyondur. Oyuncu 1'in seçenekleri şunlardı yukarı ve sonra yukarı; yukarı ve sonra aşağı; aşağı ve sonra yukarı ve aşağı ve sonra aşağı. Teşekkürler Jake, pardon.

Şimdi neden 4 strateji var? Bu biraz sürpriz belki de çünkü eğer Oyuncu 1 aşağıyı seçerse o zaman ikinci bilgi kümesinde seçim yapma zorunda kalmayacağını bilecek. Yine de, bir stratejiyi yazarken her bir bilgi kümesi için bir talimat yazmamız gerekir. Yani bu stratejilerin ikisini de alıyoruz. Burada Oyuncu 2'nin stratejileri daha kolaydır. Oyuncu 2'nin stratejileri sadece sol veya sağdır. Bunu aklımızda tutarak matrisi

çizelim. Burada Oyuncu 1'in 4 stratejisi var ve bunlar şöyledir (yukarı, yukarı), (yukarı, aşağı), (aşağı, yukarı) ve (aşağı, aşağı). Herkes takip etti mi buraya kadar?

Temelde sadece bazı şeyleri karşıya geçiriyoruz ve sonra getirileri de geçirmemiz gerekir yani (yukarı, yukarı) yı takiben sol (4, 2) olur. (Yukarı, yukarı) yı takiben sağ (0, 0) olur. Yukarı, sağ, yukarı (0, 0) dır. ((Yukarı, aşağı), sol) ise yukarı, sol, aşağı ile aynıdır yani (4, 2) olur. ((Yukarı, aşağı), sağ) ise yukarı, sağ ve aşağıdır yani (1, 4) olur. ((Aşağı, yukarı, sol) aşağı, sol demekle aynı şey yani (0, 0) olur. ((Aşağı, yukarı), sağ) (2, 4) olur. ((Aşağı, aşağı), sol) bir kez daha (0, 0) olur ve ((Aşağı, aşağı), sağ) bir kez daha (2, 4) olur. Herkes getirileri nasıl bulduğumu anladı mı? Ben sadece ağacın üzerinde hangi yoldan gideceğime bu stratejilerden baktım. Eğer bunları birleştirirsem, bu bana tüm bir patika verir ve beni bir son noda ulaştırır.

Bahsettiğimiz gereksiz fazlalığı görebilirsiniz. Bunların bir nevi aynı olduğunu ifade etmiştik ve matriste görebileceğiniz gibi matrisin alt dört karesinde tekrarlama var. Bu satır, bu satır ile aynı. Herkes bundan memnun mu? Tamam, bir matrisimiz var. Hadi buradaki Nash dengelerini bularak bunu analiz edelim. Bu oyundaki Nash dengelerini bulmak için, en iyi tepkileri bulacağız. Bu yüzden sola en iyi tepki nedir diye sorarak başlayalım. Yani eğer Oyuncu 2 sol seçerse, Oyuncu 1'in en iyi tepkisi ya (yukarı, yukarı) veya (yukarı, aşağı) dır. Eğer Oyuncu 2 sağ seçerse o zaman Oyuncu 1'in en iyi tepkisi ya (aşağı, yukarı) veya (aşağı, aşağı) dır. Buraya kadar herkes tamam mı?

Eğer Oyuncu 1 (yukarı, yukarı) yı seçerse o zaman Oyuncu 2'nin en iyi tepkisi solu seçmektir. Eğer Oyuncu 1 (Yukarı, aşağı) yı seçerse o zaman Oyuncu 2'nin en iyi tepkisi sağ seçmektir. Eğer Oyuncu 1 (aşağı, yukarı) yı seçerse o zaman Oyuncu 2'nin en iyi tepkisi sağ seçmektir. Ve eğer Oyuncu 1 (aşağı, aşağı) yı seçerse o zaman Oyuncu 2'nin en iyi tepkisi sağ seçmektir. Yani bu biraz yavaş oldu ve ben sadece dikkatli olmak istiyorum. Yavaş gitmemin bir nedeni var. İlerledikçe işler daha zorlaşacak ve ben biraz dikkatli olmak istiyorum. Etrafta insanların biraz uykulu baktığını görüyorum. Biliyorum bu neredeyse öğle yemeği vakti. Eğer komşunuzun uyukladığını görürseniz onlara sıkı bir dirsek atın çünkü bunun uykuya dalmak için iyi bir zaman olduğunu sanmıyorum. Bazen bir şeyleri kaçıracaksınız diye endişe ediyorum ve bu ilerledikçe daha zor olacak ve bazı şeyleri kaçıracaksınız.

Pekâlâ, bu oyundaki Nash dengeleri nelerdir? Bunu nasıl yapacağımızı biliyoruz. Nash dengeleri şunlar olmalı (yukarı yukarı) yı takiben sol. Hepsini bulduğumdan emin olun. (Aşağı, yukarı) yı takiben sağ ve (aşağı, aşağı) yı takiben sağ. Bu üç Nash dengesini istiyorum. Tamam, bu çok zor bir iş değildi. Bu oyunda 3 Nash dengesi var. Ve eğer bu oyunu size dönemin ilk yarısında vermiş olsaydım, size ağacı göstermemiş olsaydım – bu ağacı hiç görmemiş olurdunuz – size sadece bu oyunu verdim ve bu oyundaki Nash dengelerini bulmanızı istedim ve bu ara sınavda bir soruydu, o zaman burada durmuş olacaktık. Şöyle derdik: tamam, bu Nash dengelerini buldum. Belki de siz devam edip karma olanları da bulurdunuz bilemem ama esasen bu noktada işimizi bitirmiş olurduk.

Tekrar söyleyelim. Eğer ara sınav öncesinde yapmış olacağımız gibi başlasaydık, benim size bir getiri matrisi vermemle ve size Nash dengelerini bulmanızı sormamla, o zaman bu noktada işimiz tamamlanmış olurdu. Üç Nash dengesini bulmuş olurduk, en azından üç saf strateji Nash dengesini. Problem şu ki eğer ağaca geri dönersek, dinamik oyuna – içinde biraz hareket olan oyuna – ve bu oyuna gerçekten bakarsak, bu Nash dengelerinin hepsinin yanı derecede akla yakın oldukları çok açık değil. Bu Nash dengelerinin bazılarında neyin akla yakın olmadığını görebilen var mı? Bunlarla ilgili akla yatkın olmayan nedir? Bunu cevaplamak isteyen?

Hadi bu oyuna tekrar bakalım. Bu oyun biraz karmaşık. Belki de burada 1'in ne yapması gerektiği çok net değil ve belki de Oyuncu 2'nin ne yapması gerektiği de çok açık değil, çünkü en nihayetinde, Oyuncu 2 nerede olduğunu bilmiyor ve Oyuncu 1'in, eğer Oyuncu 1 tekrar hamle yaparsa aşağı mı yukarı mı seçeceğini bilmiyor ama: aması ne? Patrick'e bir mikrofon uzatabilir miyiz?

Öğrenci: Eğer buna tersten bakarsanız, Oyuncu 1'in ikinci seçimini dışarıda bırakabilirsiniz. O her zaman aşağıyı seçecek yani bu o nodda (1, 4). O zaman siz bilirsiniz ki Oyuncu 2 her zaman sağı seçecek çünkü getirisi hep 4 olacak. Yani o zaman Oyuncu 1 seçmek zorunda kalmayacak – şunu demek istiyorum o zaman Oyuncu 1 neyi seçeceğini bilir. O zaman aşağıyı seçer.

Profesör Ben Polak: Güzel. Hadi Patrick'in söylemiş olduğu şeylerin üzerinden gidelim. Bu çok iyi. Yani bu oyunu ağaçları bize nasıl analiz etmemiz gerektiği öğretildiği şekilde analiz edersek, temelde geri dönük çıkarımla, ilk olarak şunu görürüz eğer Oyuncu 1'e tekrar hamle sırası gelirse burada nerede olduğunu bilecek ve 0 ile 1 arasında seçim yaptığını bilecek. Bu yüzden aşağıyı seçecek. Doğru mu? Aşağıyı seçecek, ama bunu bildiği için Oyuncu 2, kendisinin nerede olduğunu bilmesee bile, Oyuncu 2'yi aslında çok kolay bir seçim bekleyecek. Biliyor ki eğer solu seçerse ya 2 ya da 0 alır, ama sağı seçerse 4 alır. Dört 2'den büyüktür ve dört 0'dan büyüktür. Yani aslında Oyuncu 2 sağı seçecektir. Ve bu veri iken, Oyuncu 2'nin sağı seçeceği veriyken, Oyuncu 1 esasen yukarıyı seçerse sağ ve aşağı takip edeceğinden, 1 ile eğer aşağı seçerse sağ takip edeceğinden ki olan budur 2 arasında seçim yapar.

Yani bu oyunu temelde geriye dönük çıkarım ile analiz edebiliriz. Bu tam anlamıyla geri dönük çıkarım değil çünkü buraya 2'nin nerede olduğunu bildiğiyle ilgili ufak bir şey ekledik, ama öyle oldu ki, nerede olursa olsun bir kez Oyuncu 1'in aşağıyı seçeceğini fark ettiğinde baskın bir stratejisi, daha iyi bir stratejisi vardı. Doğru mu? Eğer geri gidip bu Nash dengelerine bakarsak, henüz elde ettiğimiz öngörü neydi? Oyucu 1 için aşağı, Oyuncu 2 için sağ ve sonra Oyuncu 1 için tekrar aşağı. O strateji buradaki. Yani bu Nash dengelerinden birisi bizim bu ağacı akla uygun analiz etmemizle örtüşüyor, ama diğer ikisi örtüşmüyor. Bu iki Nash dengesi geriye dönük çıkarım ile uyumlu değil.

Bunlar mükemmel iyilikte Nash dengeleri, eğer ara sınavda size bu matrisi vermiş olsaydık bunun hoş olduğunu düşünürdünüz. Ama öyle oluyor ki bu iki Nash dengesi Oyuncu 1'in yukarı seçimini içeriyor ki biz eğer buraya ulaşılsa Oyuncu 1'in bunu seçmeyeceğini biliyoruz. Ve bu Nash dengelerinden birisi Oyuncu 2'nin sol seçimini içeriyor ki bunu seçmesinin nedeni Oyuncu 1'in yukarıyı seçeceğini düşünmesi ki aslında az önce Oyuncu 1'in bunu yapmayacağını ortaya koymuştuk. Arkadaki arkadaşlar, buraya duvardan yansıyan çok fazla ses var, bu yüzden balkondakiler sessiz olun. Teşekkürler.

Yani bu iki Nash dengesi, bunlar bu oyunun tam anlamıyla Nash dengeleri, ama akla yatkın değiller. Oyunlar hakkında konuşmayı öğrendiklerimizle tamamen uyumsuzlar. Şimdi, bunu daha önce görmüştük. Piyasaya giriş oyununda görmüştük. Bu çok daha karmaşık, çok daha ilginç bir örnek, ama piyasaya giriş oyununda gördük ki bir piyasaya giren tek bir firma varsa, o oyunda aslında iki Nash dengesi vardı ve bir tanesinin inanılır olmadığını söylemiştik. Burada biraz daha karmaşık, ama yine de bu iki denge uyduruk dengeler veya sahte dengeler veya bizim inanmayacağımız dengeler gibi görünüyorlar. Bunlara inanmamamızın nedeni geriye dönük çıkarım ve bizim geriye dönük çıkarımla ilgili sağduyumuz ile uyumlu olmamaları.

Yani yeni bir nosyona ihtiyacımız var, dersin amacı neydi? Biz içinde hem eş anlı hem de ardışık hamleler olan oyunları modelleyebilmek istiyoruz ve bu oyunlara bakabilmeyi ve dersin iki yarısında öğrendiğimiz teknikleri kullanabilmeyi istiyoruz. Dersin ilk yarısında Nash dengesi kavramını kullanabilmeyi istiyoruz ve dersin ikinci yarısından geriye dönük çıkarımı kullanabilmeyi istiyoruz. Ama burada öğrendiğimiz Nash dengesinin, eğer Nash dengesi kavramını alıp bu ardışık hamleli oyunlara atarsak, mantıklı gelmeyen dengeler üreteceğidir. Yani daha rafine bir denge kavramına ihtiyacımız var, bu hem eş anlılık hem de ardışıklığın olduğu durumlarla başa çıkabilmek için daha iyi bir denge kavramına ihtiyacımız var. Elimizde ikisi de var biraz mükemmel bilgi ve biraz mükemmel olmayan bilgi.

Bu bir örnekti. Size ikinci bir örnek daha vereyim eğer bu örnek yeterince ikna edici olmadıysa. Bu örneği yukarıda bırakayım. Şimdiye kadar bu oyunlarda Nash dengesinin başımızı derde soktuğunu gördük ve başımızı derde soktuğunu çünkü geriye dönük çıkarım mantığıyla çatıştığını gördük. Şimdi, size farklı bir oyun göstereceğim ve göreceğiz ki Nash dengesi yine başımızı derde sokacak. Bu üç oyunculu bir oyun olacak. İlerledikçe daha da karmaşıklaşacağız. Bir başka örnek, bu kez üç oyunculu. Örnekler daha zorlaştıkça bunları takip edebildiğiniz görmek için sizin daha uyanık olmanıza ihtiyacım var.

Yani bu daha karmaşık bir ağaçtır. Bu ağaçta Oyuncu 1 ilk hamleyi yapar ve A veya B arasından seçimini yapar ve eğer Oyuncu 1 A'yı seçerse oyun sona erer, o 1 alır ve diğer iki oyuncu bir şey almaz. Eğer B'yi seçerse o zaman Oyuncu 2 ve 3 bu aşağıda küçük bir oyun oynarlar ve bu alt-oyunda 2 önce hamle yapar ve sonra 3 ikinci hamleyi yapar ve bu alt-oyundaki getiriler şöyledir. Yine, ilk önce Oyuncu 1'in

getirilerini kullanarak. Yani (0, 1, 1), (0, 0, 2), (0, 0, -1) ve (2, 1, 0) vardır. Yani bu oldukça karmaşık bir oyun, her şeyden önce 3 oyuncusu var, yani bunu bir matrise yazmak biraz zor olacak, ama yine de bunu yapmayı deneyeyim.

Bu oyunu şöyle modelleyebileceğimizi ileri sürüyorum. Bu oyunda Oyuncu 1 hangi matris olduğunu seçer, hadi buna Matris A ve Matris B diyelim. Oyuncu 1 matrisi seçiyor, Oyuncu 2, hadi bunlara yukarı ve aşağı diyelim: Oyuncu 2 yukarı veya aşağı seçiyor. Ve Oyuncu 3 sol veya sağ seçiyor. Fark ettiyseniz bu oyunda Oyuncular 2 ve 3 aslında en başta A veya B seçimini görebiliyorlar. Bu getirileri doğru yerlere koymaya çalışalım. Bunu yapmak her zaman kolay değildir ama deneyelim. Yani A kolay, eğer Oyuncu 1 A'yı seçerse, o zaman bu matristeki getiriler biraz saçma olur. Çünkü eğer Oyuncu 1 A'yı seçerse, diğerleri ne yaparsa yapsın getiri (1, 0, 0) dır. Bu çok ilginç olmayan bir matristir.

Ama eğer Oyuncu 1 B'yi seçerse, o zaman hayat daha ilginç hale gelir. O zaman eğer Oyuncu 2 yukarı seçer ve Oyuncu 3 sol seçerse, kendimizi burada buluruz yani (0, 1, 1) olur. Eğer Oyuncu 2 – bu 2 ve bu da 3 – eğer Oyuncu 2 yukarı seçer ve Oyuncu 3 sağ seçerse o zaman biz (0, 0, 2) de oluruz, yani buraya (0, 0, 2) gelir. Eğer Oyuncu 2 aşağıyı seçer ve Oyuncu 3 solu seçerse o zaman biz (0, 0, -1) de oluruz. Herkes için bu tamam mı? Eğer Oyuncu 3 aşağı seçerse o zaman biz bu aşağıda oluruz bu da (2, 1, 0) dır. Tamam, işte küçük bir oyun. Oyuncu 1 matrisi seçiyor, Oyuncu 2 matristeki satırı seçiyor, her ne kadar sol tarafta biraz saçma bir şekilde olsa da ve Oyuncu 3 matristeki kolonu seçiyor, yine her ne kadar sol taraftaki saçma olsa da. Bu şekilde pek fazla ilgilenmiyoruz.

Tamam, peki ya şimdi? Bir kez daha, bu oyundaki Nash dengelerini arayabiliriz. Bu oyunda birçok Nash dengesi olduğu ortaya çıkıyor. Size bir Nash dengesi göstereyim ve sonra onun hakkında konuşuruz. Burada bir sürü Nash dengesi olduğunu öne sürüyorum ve bunlardan birisi (A, yukarı, sol) Nash dengesidir. İlk olarak bunun ağaçta nerede olduğuna bir bakalım. Yani Oyuncu 1 A'yı seçti, Oyuncu 2 yukarıyı seçti ve sol, ama bunlar A'yı takip ettiler yani kendimizi burada bulduk, kendimizi (1, 0, 0) da bulduk. Yani (A, yukarı, sol) ağaçtaki bu kutu. Şimdi, bunun gerçekten Nash dengesi olduğunu kontrol edelim.

Dersin ilk yarısından bunu nasıl yapılacağını hepimiz biliyoruz. Yani bunun Nash dengesi olduğunu kontrol etmek için hiçbir oyuncunun sapma yaparak daha iyi duruma gelemeyeceğini kontrol etmeliyiz. Hadi Oyuncu 1 ile başlayalım. Eğer Oyuncu 2 ve 3'ü sabit alırken Oyuncu 1 sapsa, o zaman oyuncu 1 Matris A'dan Matris B'ye geçiyor demektir. Doğru mu? Yani bu sol taraftaki matrisin bu kutusundan sağ taraftaki matrisin ona denk kutusuna geçeriz. Oyuncu 1'in getirisi 1'den =a dönüşür, yani Oyuncu 1 sapsa istemez. Herkes bundan memnun mu? Burada Oyuncu 1 sapsa yapmak istemez. Peki ya Oyuncu 2? Eğer Oyuncu 2 sapsa, Oyuncular 1 ve 3'ü sabit alırken, o zaman Oyuncu 2 bu matriste satırları değiştirecektir, yani bu kutudan bu kutuya geçeriz. Oyuncu 2 önceden 0 alıyordu. O

hala 0 alıyor, yani sapmak için bir teşviki yok. Ve aynı argüman Oyuncu 3 için de geçerlidir çünkü matristeki satırı sabit tutarken kolonu değiştirecektir, yani bir kez daha her iki durumda da 0 alır. Herkes mutlu mu bundan?

Yani bu gerçekten bir Nash dengesi ve yine eğer bu ara sınavda çıkmış olsaydı bunu oluşturmuş olabilirdim, size bu matrisleri veya arkalarındaki hikâyeyi vermiş olabilirdim ve siz de bulmuş olurdunuz – size bunun bir Nash dengesi olup olmadığını sormuş olabilirdim ve cevap evet olurdu. Ama ben bir kez daha iddia ediyorum ki bu inanılabilecek bir Nash dengesi değil. Bu bir Nash dengesidir, resmen bu bir Nash dengesidir, ama bu oyunun nasıl oynanacağına dair akla yatkın bir öngörü değildir. Neden bu oyunun nasıl oynanacağına dair akla yatkın bir öngörü değildir? Gören var mı? Biraz ağaca bakın.

Buradaki bilgide, ara sınav öncesi bilgide, bu düzgündür. Ama bu oyunun gerçek yapısını biliniyorken bunun mantık dışı olduğunu iddia ediyorum. Bu neden mantık dışıdır? Fark ederseniz eğer Oyuncu 1 öngörülen aksiyon A'dan aksiyon B'ye saparsa, o zaman biz burada olurduk. Fark ederseniz ağacın burasından itibaren geri kalanı küçük bir oyun gibi duruyor, doğru mu? Buradan itibaren ağaç küçük bir oyun gibi duruyor. Yani buradaki şey, hadi bunu yeşille yapalım, oyun içinde bir oyundur. Bu bir alt-oyundur. Bu alt-oyun aslında sadece iki oyuncu içerir. İçerdiği iki oyuncu Oyuncu 2 ve Oyuncu 3'tür. Oyuncu 1'in işi bitti, Oyuncu 1 bizi buradaki oyuna soktu, ama şimdi bu küçük alt-oyun, bu sadece Oyuncu 2 ve Oyuncu 3'ü içeren küçük bir alt-oyun.

Bu küçük alt-oyunu inceleyebiliriz. Eğer bu küçük alt-oyunu analiz edersek bize ne verecektir? Ne bulacağız? Hadi bu alt-oyuna bakalım. Yeşil alt-oyuna bakın, Oyuncu 1'in B seçimiyle gerçekleşecek olan oyuna. Bu sadece Oyuncu 2 ve Oyuncu 3'ün olduğu bir alt-oyun. Yani neden Oyuncu 1'i unutmuyayım. Biliyoruz ki – Oyuncu 1 oyunun bir parçası, getiriler alıyor, ama Oyuncu 1 hamlesini yaptı, aslında artık alakalı değil. Bu yüzden hadi bu oyuna sadece Oyuncu 2 ve 3'ü içeren bir oyun gibi bakalım ve hadi Oyuncu 2 ve 3 için olan bu matrise bakalım. Yani bu gerçekten de yukarıdaki matrise tekabül eder ki bu matriste Oyuncu 2 yukarı ve aşağı seçer. İşte burada yukarı ve aşağı ve eş anlamlı olarak Oyuncu 3 sol veya sağ seçiyor. Bu bilgi kümesinde sol veya sağ var ve getiriler (1, 1), (0, 2), (0, -1) ve (1, 0) dir.

Yani bunun şu küçük yeşil oyunun gösterimi olduğunu ileri sürüyorum. Belki bunu da yeşil yapmalıydık. Buradaki şey şuradaki şeye denk geliyor. Herkes için bu tamam mı? Yani eğer Oyuncu 1 A yerine B seçmişse, o zaman küçük bir oyuna girmiş oluruz, oyun içinde bir oyuna veya sadece Oyuncu 2 ve 3'ü içeren bir alt-oyuna. Ve bu oyunu analiz edebiliriz. Bu basit bir oyun. İşte burada. Ve bu oyunla ne yaparız? Bu oyundaki Nash dengelerini ararız. Hadi bu oyundaki Nash dengelerini arayalım. Peki, bu oyunda neyi fark ederiz? Eğer Oyuncu 3 solu seçerse o zaman Oyuncu 2 yukarıyı seçmelidir. Eğer Oyuncu 3 sağ seçerse o zaman Oyuncu 2 aşağıyı seçmelidir. Eğer Oyuncu 2 yukarıyı seçerse o zaman Oyuncu 3 sağ seçmelidir,

çünkü 2 birden büyüktür. Ve eğer Oyuncu 2 aşağı seçecek olursa o zaman Oyuncu 3 yine sağ seçmelidir, çünkü sıfır -1'den büyüktür.

Yani aslında bu küçük alt-oyunda, gerçekten Oyuncu 3'ün baskın bir stratejisi var. Eğer bu küçük alt-oyunda kendimizi bulmuş olursak, Oyuncu 3'ün baskın bir stratejisi vardır ki bu da sağ oynamaktır ve daha da fazlası bu alt-oyunun tek bir tane Nash dengesi vardır. Eğer size bu alt-oyunu tek başına verseydim, bu alt-oyundaki, bu oyun içinde oyundaki Nash dengesinin (aşağı, sağ) olduğu çok açıktır. Peki, bu bize ne anlatmaktadır?

Bu bize şunu anlatmaktadır eğer Oyuncu 2 ve 3 hiç bu oyunu oynamaya yöneltilirlerse – ve bu sadece Oyuncu 1 B seçerse olur – eğer Oyuncu 2 ve 3 bu oyunu oynamaya yöneltilirlerse, gençliğimizden veya en azından ara sınavdan önce öğrendiklerimizden biliyoruz ki bu alt-oyunda Nash dengesini oynayacaklar. Ve alt-oyundaki Nash dengesinde Oyuncu 3 sağ seçer ve Oyuncu 2 aşağıyı seçer. Ama üzerinde konuştuğumuz denge, üzerinde daha önce tartışmış olduğumuz denge (A, yukarı, sol) – daha önce konuştuğumuz (A, yukarı, sol) dengesi Oyuncu 2'nin aşağı seçimini içermez. Aslında yukarı seçiyor görünür. Ve Oyuncu 3'ün sağ seçimini içermez. Aslında solu seçer görünüyor.

Özetleyelim. Bu oyunun bir dengesini bulduk, oyunun bu dengesi (A, yukarı, sol)'du ama bunun akla uygun bir denge olmadığını öne sürdüm. Bu akla uygun bir denge değildir çünkü eğer bu oyun içindeki oyunu oynayacak olsaydık dengeyi oynamıyor olacaktık. Tekrar söyleyeyim, oyunun tamamında (A, yukarı, sol) bir dengedir. Ama bunun saçma bir denge olduğunu iddia ediyorum çünkü şu öngörüü içeriyor, eğer gerçekten bu oyun içindeki oyuna geldiysek, biz artık dengeyi oynuyor olmayacağız ve bu doğru görünmüyor. Eğer dengeye inanacaksak, tutarlı olmalıyız ve her yerde dengeye inanmalıyız.

Yani bu bizi yeni bir fikre getiriyor ve bu yeni fikrin iki parçası olacak. Birinci parçası bir şekilde tahtada yer alıyor. Üzerinde gayri resmi konuştuğumuz bir şey. Bu alt-oyun kavramı. Alt-oyun nedir? Oyun içinde bir oyundur. Bunu gayri resmi olarak kullanıyordum ama bunun ne demek olduğunu resmi olarak düşünmeye başlamamız lazım. Bununla ilgili gayri resmi konuştum. Bu yeşil objenin Oyuncu 1 B'yi seçerse oynanacak oyun olduğunu söyledim. Derste başka alt-oyunlardan da bahsettik. Piyasaya giriş oyununda eğer bir rakip pizza şirketi girerse, Miami piyasasına filan, ortaya çıkacak olan alt-oyundan, oyun içinde oyundan bahsettik. Tour de France'dan bahsettiğimizde orada da ne zaman gruptan kopacağınıza dair oyun içinde bir oyun olduğundan söz ettik.

Ama şimdi bu oyun içinde oyun nosyonu hakkında resmi olmak istiyorum ve biraz nomenklatur takdim etmek istiyorum. Resmi tanım şudur. Alt-oyun oyunun bir parçasıdır, gayri resmi olarak ağacın içindeki bir oyun gibi görünür. Şu üç özelliği sağlar. Bir kendisi de bir oyun gibi görüldüğünden belirli bir başlama noktası

olmalıdır. Yani tek bir noddan – alt-oyun tek bir noddan başlamak zorundadır. Örneğe bir bakalım. Örnekte sadece şu noddan başlayan alt-oyuna baktık. İkincisi, o nodu takip edenlerin tümünü kapsar. Bizim örneğimizde, alt-oyunumuz burada. Bizim yeşil alt-oyunumuz burada. Burası başlangıç noktasıdır. Bunlar da o nodu takip eden nodların hepsi: bunlar çocuklar ve bunlar torunlar. Eğer bu büyük anne veya büyük baba nodunuz varsa onun tüm çocuklarını ve tüm torunlarını dahil etmek zorundasınızdır. Yani o nodu takip edenlerin tümünden oluşur. Ve son olarak – bu önemlidir—hiçbir bilgi kümesini parçalamaz. Yani bir alt-oyun, gayri resmi olarak, sadece oyun içinde bir oyundur. Ama birazcık resmi olarak, ben bir bilgi kümesinden tek bir nodu bu alt-oyunun içine koyamam eğer bilgi kümesindeki diğer tüm nodları dahil etmeyeceksem.

Hadi bazı örneklere bakalım. Bu yukarıda bir örneğimiz var, piyasaya giriş oyunu buna benziyordu. Peki, buradaki alt-oyunlar nelerdir, burada bir sır yok, bu bir alt-oyundur. Aslında bir başka alt-oyun daha var, öbür alt-oyunu görebilen var mı? Oyunun tamamı bir alt-oyun. Biraz abes de olsa oyunun kendisi de bir alt-oyundur. Yani bu belirli oyunda, piyasaya giriş oyununun resmi gibi olan oyunda, aslında iki alt-oyun vardır ama sadece bir tanesi gerçek alt-oyundur (proper sub-game).

İşte daha karmaşık bir örnek. Bu aslında hayatı daha ilginç hale getirmek için bayağı karmaşık bir örnek olacak. Yani 1 hamle yapacak, sonra 2 hamle yapacak ve sonra 1 yine hamle yapacak. Bunun hepsi Oyuncu 1 için kocaman bir bilgi kümesi olacak. Ve 1 şöyle hareket edecek. Yani yine getiriler olmadan bu küçük bir ağaç ve buradaki anahtar nokta şu ki bu bir bilgi kümesidir. Hadi bakalım – bu ağaca bakalım bir saniye ve nelerin alt-oyun olduğunu ve nelerin olmadığını bulalım. İlk olarak, bu bir alt-oyundu ve bu bir alt-oyundu. Peki ya buradaki şey? Bu bir alt-oyun mu? Bu bir alt-oyun değil. Hangi kuralı bozuyor? Bir bilgi kümesini parçalıyor yani kural üçe göre bu iyi değil. Peki ya bu şey? Bu bir bilgi kümesini parçalamıyor. Tüm bilgi kümesi içinde kaldı. Bu iyi mi? Hayır değil çünkü tek bir noddan başlamıyor, yani kural 1'i sağlamadığı için iyi değil. Eğer bunu yaparsak, buradaki parçaya bakarız. Şuradaki parça, bu da iyi değil. Neden iyi değil? Yine bir bilgi kümesini parçalıyor, yani kural 3 yüzünden bu da iyi değil.

Evde ağaçlar çizerek nelerin alt-oyun olduğu nelerin olmadığı üzerine pratik yapabilirsiniz. Peki, şimdi alt-oyunun tanımını resmileştirdiğimize göre – bu temelde sadece daha önce konuştuğumuz oyun içinde oyunun oluşturulmasıydı– ben yeni çözüm, bizim yeni çözüm kavramımız olacak şeyi takdim etmek istiyorum. Ve bu da neredeyse finale kadar kullanacağımız çözüm kavramı olacak. Tanım, görevimizin ne olduğunu hatırlayalım. Görevimiz dönemin ilk yarısındaki fikri, yani Nash dengesini içeren ama bunu yaparken dönemin ikinci yarısında öğrendiğimiz şeye, yani oyunların ardışık öğeleri olduğuna ve insanların geriye dönük çıkarım ile hareket ettiklerine, bir nevi saygı duyan bir çözüm kavramı bulmaktı.

Yani özellikle, oyunculara ağacın aşağılarındaki alt-oyunlarda Nash dengesi olmayan stratejilere göre oynamalarını söyleyen Nash dengelerini ortadan kaldırmak istiyoruz. Tekrar söyleyelim, ağacın aşağılarına doğru oyuncular Nash dengesine uymayan şekilde oynamalarını söyleyen Nash dengelerin ortana kaldırmak istiyoruz. Yeni kavramımızın şunu söylemesini istiyoruz: ağacın neresinde olursanız olun, Nash dengesini oynayın ve bu tam olarak tanımın söyleyeceği şeydir. Yani bir Nash dengesi, S_1^* , S_2^* ve ta S_m^* 'a kadar bir alt-oyun mükemmel dengesidir – yani bu bir AMD'dir (SPE) – eğer oyunun her bir alt-oyununda bir Nash dengesine neden oluyorsa o bir alt-oyun mükemmel dengesidir.

Yani alt-oyun mükemmel dengesi olmak için, kendisinin Nash dengesi olması gerekiyor tabii ki, ama aynı zamanda oyunculara her bir alt-oyunda Nash dengesini oynamalarını söylüyor. Hadi bunu hemen örneklerimiz götürelim. Bu örnekte, bunun bir alt-oyun olduğunu biliyoruz. Biliyoruz ki bu alt-oyunda sadece tek bir Nash dengesi var ve bu Nash dengesi Oyuncu 2'nin aşağı seçimini ve Oyuncu 3'in sağ seçimini içeriyor. Yani bu dengeye göre Oyuncu 2'nin aşağıyı seçeceğini biliyoruz ve bu dengeye göre Oyuncu 3'ün sağı seçeceğini biliyoruz. Yani eğer şimdi tüm oyundaki bir dengeyi bulmak zorundaysak – hadi Oyuncu 1'in seçimine dönelim – Oyuncu 1 eğer A seçerse 1 alır, eğer B seçerse bilir ki bu Nash dengesi oynanacak yani 2 alacak. 2'yi 1'e tercih eder, yani buradaki alt-oyun mükemmel dengesi şudur Oyuncu 1 B seçer, Oyuncu 2 aşağıyı seçer ve Oyuncu 3 sağı seçer.

Bu oyunun bir dengesidir ve alt-oyunda da bir Nash dengesine yol açar. Yani bu örnekte, alt-oyun mükemmel dengesi ilk olarak alt-oyuna bakıp oradaki dengeyi bularak ve sonra geri gelip tüm oyundaki dengeye bakarak bulundu. Sonunda elde ettiğimiz denge tüm oyunda bir Nash dengesidir, ama daha da önemlisi, alt-oyunda bir Nash dengesine yol açar.

Hadi diğer örneğimize de gidelim ve sonra duracağım. Diğer örneğimiz buradaydı. İşte bizim diğer örneğimiz. Ve öne sürdük ki, herkes beklesin, buradaki iyi denge, inandığımız şey şuydu (aşağı, aşağı, sağ). Bu oyundaki alt-oyunlar neredeler? Bu ağaçtaki alt-oyunlar neredeler? Birileri?

Ben burada sadece bir tane gerçek alt-oyun olduğunu ileri sürüyorum ve o da buradaki parça. Bu bir alt-oyundur. Bu biraz saçma alt-oyunun Nash dengesi nedir? Bu biraz saçma alt-oyunun Nash dengesi şudur Oyuncu 1 aşağı seçmelidir. Yani bir Nash dengesinin alt-oyun mükemmel dengesi olabilmesi için – burada 3 Nash dengesi var: 1, 2, 3. Bu Nash dengesinin alt-oyun mükemmel dengesi olabilmesi için, buradaki saçma alt-oyunda Oyuncu 1'e aşağıyı seçmesini söylemelidir ve işte burada. Bu oyundaki alt-oyun mükemmel dengemiz budur. Şimdi ben bugün çok fazla resmi şey, çok fazla yeni fikir olduğunu biliyorum ve Pazartesi geri geldiğimizde önce size bir oyun verip bu fikirleri tazeleyeceğiz ve sonra doğrudan uygulamalara geçeceğiz. Bana güvenin: uygulamalar olacak. Bu faydalı olacak. Pazartesi görüşürüz. Bir ödev teslimi var ve başka biri de webde sizi bekliyor.



[transkript sonu]